

# Projection perspective

## Introduction

David Odin

Forma3Dev pour CPE-Lyon

© ⓘ ⓘ ⓘ — 2018

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

## PROJECTION PERSPECTIVE – PLAN

# Transformations linéaires

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

## DÉFINITIONS

Une transformation est linéaire si on peut l'exprimer ainsi :

$$X' = A \cdot X$$

en 2D :

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x & \beta \cdot y \\ \alpha' \cdot x & \beta' \cdot y \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

## EXEMPLES

- Scaling (homothéties / affinités orthogonales)  $M = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$
- Symétrie  $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Rotation  $M = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$
- Shearing (cisaillement / transvection)  $M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

## PROBLÈMES

- La translation n'est pas une opération linéaire, mais affine :

$$t(P) = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix}$$

- Composer des rotations, des homothéties, etc. est simple :

$$P' = R_1 \cdot R_2 \cdot S_1 \cdot R_3 \cdot Sh \cdot S_2 \cdot P = M \cdot P$$

- Avec des translations, ce n'est plus possible :

$$P' = R_4(R_3(R_2 \cdot R(P + t_1) + t_2) + t_3)$$

- traitement complexe

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

## ESPACE PROJECTIF

On voudrait une écriture matricielle, même pour les translations :

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x & +0 \cdot y & +t_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x & +1 \cdot y & +t_y \cdot 1 \end{pmatrix}$$

En ajoutant une ligne (coordonnée), on se rapproche :

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x & +0 \cdot y & +t_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x & +1 \cdot y & +t_y \cdot 1 \\ 0 \cdot x & +0 \cdot y & +\alpha \cdot 1 \end{pmatrix}$$

soit :

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour être cohérent, on choisit  $\alpha = 1$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

## COORDONNÉES HOMOGÈNES

Soit  $A = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ 1 \end{pmatrix}$ , et  $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ 0 \end{pmatrix}$

- $u + v$ ,  $u - v$  et  $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$  sont des vecteurs ( $z = 0$ )
- $A + \lambda u$  est un point ( $z = 1$ )
- $B - A$  est un vecteur ( $z = 1 - 1 = 0$ )
- $A + B$  est un point (milieu de  $A$  et  $B$ ) :  $\begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (x_a + x_b)/2 \\ (y_a + y_b)/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## MATRICES EN COORDONNÉES HOMOGÈNES

Rotation :  $R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$R(A) = \begin{pmatrix} a_x \cdot \cos \alpha + a_y \cdot \sin \alpha \\ -a_x \cdot \sin \alpha + a_y \cdot \cos \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $R(u) = \begin{pmatrix} u_x \cdot \cos \alpha + u_y \cdot \sin \alpha \\ -u_x \cdot \sin \alpha + u_y \cdot \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

Homothétie :  $S = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$S(A) = \begin{pmatrix} s_x \cdot a_x \\ s_y \cdot a_y \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $S(u) = \begin{pmatrix} s_x \cdot u_x \\ s_y \cdot u_y \\ 0 \end{pmatrix}$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

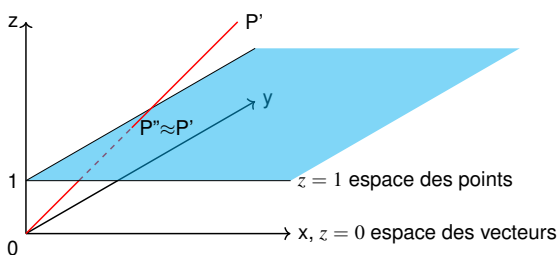
---

---

---

## MATRICES EN COORDONNÉES HOMOGÈNES, SUITE

Translation :  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $T(A) = \begin{pmatrix} a_x + t_x \\ a_y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $T(u) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix}$



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## GÉNÉRALISATION EN 3D

On a alors  $A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $u = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Et

$$M = \left( \begin{array}{ccc|c} m_{00} & m_{01} & m_{02} & t_x \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & t_y \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**Note** : La quatrième coordonnée est nommée  $w$ .

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

## PROJECTION PERSPECTIVE – PLAN

# Projection

Notes

---

---

---

---

---

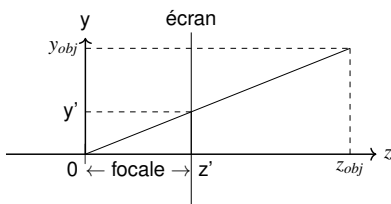
---

---

---

## POSITION DU PROBLÈME

en 2D :



Théorème de Thalès :

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{Y'}{Y} \Rightarrow \frac{f}{Z} = \frac{Y'}{Y} \Rightarrow Y' = f \cdot \frac{Y}{Z}$$

Cette relation est malheureusement non linéaire

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

## LINÉARISATION

On aimerait pouvoir exprimer cela sous la forme  $M \cdot P = P'$

$$M \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}}^P = \overbrace{\begin{pmatrix} f \cdot Y/Z \\ f \\ 1 \end{pmatrix}}^{P'}$$

Idée : tout multiplier par  $Z \Rightarrow$  plus de dénominateur

$$P' = \begin{pmatrix} f \cdot Y \\ f \cdot Z \\ Z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f \cdot Y/Z \\ f \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

## LINÉARISATION : EXPRESSION MATRICIELLE

$$M \cdot \begin{pmatrix} Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \cdot Y \\ f \cdot Z \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_M \cdot \begin{pmatrix} Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \cdot Y \\ f \cdot Z \\ Z \end{pmatrix}$$

matrice de projection

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

## ET EN 3D ?

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

et  $M$  est une matrice  $4 \times 4$ .

$$P' = M \cdot P = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x'/w' \\ y'/w' \\ z'/w' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

# Matrice de projection en OpenGL

Notes

---

---

---

---

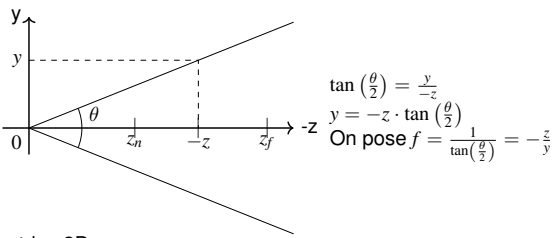
---

---

---

---

## SCHÉMA ET NOTATIONS



matrice 3D :

$$P = \begin{pmatrix} f \cdot aspect & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notes

---

---

---

---

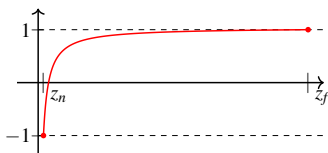
---

---

---

---

## RÉSOLUTION DES $z$



On veut :  
 $z_p \in [-1, 1]$   
 $z_p(z_n) = -1$   
 $z_p(z_f) = 1$   
 On veut plus de précision vers  $z_n$  que vers  $z_f$

- fonction affine  $\Rightarrow$  ne correspond pas
- fonction logarithmique  $\Rightarrow$  impossible
- fonction hyperbolique, de la forme  $z_p = A + B \cdot \frac{1}{z}$
- $z_p = -\frac{z_f + z_n}{z_n - z_f} + 2 \frac{z_f \cdot z_n}{z_n - z_f} \cdot \frac{1}{z}$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

## DÉFINITION DE `GLUPERSPECTIVE ()`

`void gluPerspective(double f, double aspect, double zn, double zf);`

$$P = \begin{pmatrix} f \cdot \text{aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_f + z_n}{z_n - z_f} & 2 \cdot \frac{z_f z_n}{z_n - z_f} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---