

Projection perspective

Introduction

Damien Rohmer & David Odin

Forma3Dev / CPE-Lyon

2017

Notes

DÉFINITIONS

Une transformation est linéaire si on peut l'exprimer ainsi :

$$X' = A \cdot X$$

en 2D :

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x & \beta \cdot y \\ \alpha' \cdot x & \beta' \cdot y \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Notes

EXEMPLES

- Scaling (homothéties / affinités orthogonales) $M = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$
- Symétrie $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Rotation $M = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$
- Shearing (cisaillement / transvection) $M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Notes

PROBLÈMES

- La translation n'est pas une opération linéaire, mais affine :

$$t(P) = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix}$$

- Composer des rotations, des homothéties, etc. est simple :

$$P' = R_1 \cdot R_2 \cdot S_1 \cdot R_3 \cdot Sh \cdot S_2 \cdot P = M \cdot P$$

- Avec des translations, ce n'est plus possible :

$$P' = R_4(R_3(R_2 \cdot R(P + t_1) + t_2) + t_3)$$

- traitement complexe

Notes

ESPACE PROJECTIF

On voudrait une écriture matricielle, même pour les translations :

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y + t_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + t_y \cdot 1 \end{pmatrix}$$

En ajoutant une ligne (coordonnée), on se rapproche :

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y + t_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + t_y \cdot 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + \alpha \cdot 1 \end{pmatrix}$$

soit :

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour être cohérent, on choisit $\alpha = 1$

Notes

COORDONNÉES HOMOGÈNES

Soit $A = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ 1 \end{pmatrix}$, et $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ 0 \end{pmatrix}$

- $u + v$, $u - v$ et $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ sont des vecteurs ($z = 0$)

- $A + \lambda u$ est un point ($z = 1$)

- $B - A$ est un vecteur ($z = 1 - 1 = 0$)

- $A + B$ est un point (milieu de A et B) :

$$\begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (x_a + x_b)/2 \\ (y_a + y_b)/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notes

MATRICES EN COORDONNÉES HOMOGÈNES

$$\text{Rotation : } R = \left(\begin{array}{cc|c} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

$$R(A) = \begin{pmatrix} a_x \cdot \cos \alpha + a_y \cdot \sin \alpha \\ -a_x \cdot \sin \alpha + a_y \cdot \cos \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } R(u) = \begin{pmatrix} u_x \cdot \cos \alpha + u_y \cdot \sin \alpha \\ -u_x \cdot \sin \alpha + u_y \cdot \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

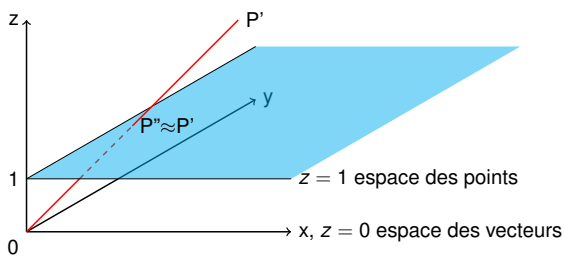
$$\text{Homothétie : } S = \left(\begin{array}{cc|c} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

$$S(A) = \begin{pmatrix} s_x \cdot a_x \\ s_y \cdot a_y \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } S(u) = \begin{pmatrix} s_x \cdot u_x \\ s_y \cdot u_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notes

MATRICES EN COORDONNÉES HOMOGÈNES, SUITE

$$\text{Translation : } T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), T(A) = \begin{pmatrix} a_x + t_x \\ a_y + t_y \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } T(u) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix}$$



Notes

GÉNÉRALISATION EN 3D

$$\text{On a alors } A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et

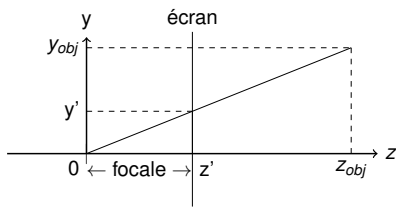
$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} m_{00} & m_{01} & m_{02} & t_x \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & t_y \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Note : La quatrième coordonnée est nommée w .

Notes

POSITION DU PROBLÈME

en 2D :



Théorème de Thalès :

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{Y'}{Y} \Rightarrow \frac{f}{Z} = \frac{Y'}{Y} \Rightarrow Y' = f \cdot \frac{Y}{Z}$$

Cette relation est malheureusement non linéaire

Notes

LINÉARISATION

On aimerait pouvoir exprimer cela sous la forme $M \cdot P = P'$

$$M \cdot \begin{pmatrix} Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \cdot Y/Z \\ f \\ 1 \end{pmatrix}$$

Idee : tout multiplier par $Z \Rightarrow$ plus de dénominateur

$$P' = \begin{pmatrix} f \cdot Y \\ f \cdot Z \\ Z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f \cdot Y/Z \\ f \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notes

LINÉARISATION : EXPRESSION MATRICIELLE

$$M \cdot \begin{pmatrix} Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \cdot Y \\ f \cdot Z \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice de projection}} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \cdot Y \\ f \cdot Z \\ Z \end{pmatrix}$$

Notes

ET EN 3D ?

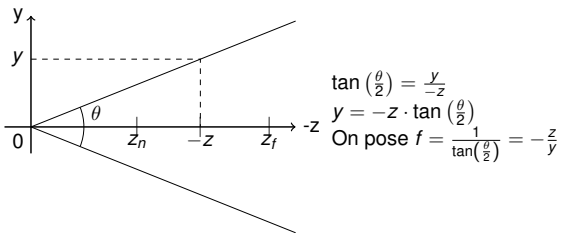
$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

et M est une matrice 4×4 .

$$P' = M \cdot P = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x'/w' \\ y'/w' \\ z'/w' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notes

SCHÉMA ET NOTATIONS

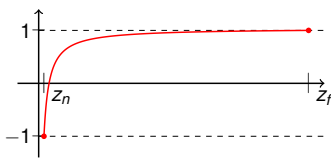


matrice 3D :

$$P = \begin{pmatrix} f \cdot \text{aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notes

RÉSOLUTION DES Z



On veut :
 $z_p \in [-1, 1]$
 $z_p(z_n) = -1$
 $z_p(z_f) = 1$
 On veut plus de
 précision vers z_n
 que vers z_f

- fonction affine \Rightarrow ne correspond pas
- fonction logarithmique \Rightarrow impossible
- fonction hyperbolique, de la forme $z_p = A + B \cdot \frac{1}{z}$
- $z_p = -\frac{z_f + z_n}{z_n - z_f} + 2 \frac{z_f \cdot z_n}{z_n - z_f} \cdot \frac{1}{z}$

Notes

DÉFINITION DE GLUPERSPECTIVE ()

```
void gluPerspective(double f, double aspect, double zn, double zf);
```

$$P = \begin{pmatrix} f \cdot \text{aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_f + z_n}{z_n - z_f} & 2 \cdot \frac{z_f z_n}{z_n - z_f} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notes

Notes

Notes
