Projection perspective

Introduction

David Odin

Forma3Dev pour CPE–Lyon

DÉFINITIONS

Une transformation est linéaire si on peut l'exprimer ainsi :

$$X' = A \cdot X$$

en 2D :

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x & \beta \cdot y \\ \alpha' \cdot x & \beta' \cdot y \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

EXEMPLES

- Scaling (homothéties / affinités orthogonales) $M = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$

Exemples

- Scaling (homothéties / affinités orthogonales) $M = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$
- Symétrie $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exemples

- Scaling (homothéties / affinités orthogonales) $M = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$
- Symétrie $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Rotation $M = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$

Exemples

- Scaling (homothéties / affinités orthogonales) $M = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$
- Symétrie $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Rotation $M = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$
- Shearing (cisaillement / transvection) $M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problèmes

- La translation n'est pas une opération linéaire, mais affine :
  $t(P) = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix}$

Problèmes

- La translation n'est pas une opération linéaire, mais affine :
  $t(P) = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix}$
- Composer des rotations, des homothéties, etc. est simple :

$$P' = R_1 \cdot R_2 \cdot S_1 \cdot R_3 \cdot Sh \cdot S_2 \cdot P = M \cdot P$$

PROBLÈMES

- La translation n'est pas une opération linéaire, mais affine : $t(P) = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix}$
- Composer des rotations, des homothéties, etc. est simple :

$$P' = R_1 \cdot R_2 \cdot S_1 \cdot R_3 \cdot Sh \cdot S_2 \cdot P = M \cdot P$$

- Avec des translations, ce n'est plus possible : $P' = R_4(R_3(R_2 \cdot R(P + t_1) + t_2) + t_3)$

PROBLÈMES

- La translation n'est pas une opération linéaire, mais affine :
  $t(P) = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix}$
- Composer des rotations, des homothéties, etc. est simple :

$$P' = R_1 \cdot R_2 \cdot S_1 \cdot R_3 \cdot Sh \cdot S_2 \cdot P = M \cdot P$$

- Avec des translations, ce n'est plus possible :
  $P' = R_4(R_3(R_2 \cdot R(P + t_1) + t_2) + t_3)$
- traitement complexe

On voudrait une écriture matricielle, même pour les translations :

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x & +0 \cdot y & +t_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x & +1 \cdot y & +ty \cdot 1 \end{pmatrix}$$

On voudrait une écriture matricielle, même pour les translations :

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x & +0 \cdot y & +t_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x & +1 \cdot y & +ty \cdot 1 \end{pmatrix}$$

En ajoutant une ligne (coordonnée), on se rapproche :

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x & +0 \cdot y & +t_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x & +1 \cdot y & +ty \cdot 1 \\ 0 \cdot x & +0 \cdot y & +\alpha \cdot 1 \end{pmatrix}$$

On voudrait une écriture matricielle, même pour les translations :

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x & +0 \cdot y & +t_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x & +1 \cdot y & +ty \cdot 1 \end{pmatrix}$$

En ajoutant une ligne (coordonnée), on se rapproche :

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x & +0 \cdot y & +t_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x & +1 \cdot y & +ty \cdot 1 \\ 0 \cdot x & +0 \cdot y & +\alpha \cdot 1 \end{pmatrix}$$

soit :

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Espace projectif

On voudrait une écriture matricielle, même pour les translations :

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x & +0 \cdot y & +t_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x & +1 \cdot y & +ty \cdot 1 \end{pmatrix}$$

En ajoutant une ligne (coordonnée), on se rapproche :

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x & +0 \cdot y & +t_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x & +1 \cdot y & +ty \cdot 1 \\ 0 \cdot x & +0 \cdot y & +\alpha \cdot 1 \end{pmatrix}$$

soit :

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour être cohérent, on choisit $\alpha = 1$

Coordonnées homogènes

Soit $A = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ 1 \end{pmatrix}$, et $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ 0 \end{pmatrix}$

Soit $A = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ 1 \end{pmatrix}$, et $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ 0 \end{pmatrix}$

- $u + v$, $u - v$ et $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ sont des vecteurs ($z = 0$)

Coordonnées homogènes

Soit $A = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ 1 \end{pmatrix}$, et $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ 0 \end{pmatrix}$

- $u + v$, $u - v$ et $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ sont des vecteurs ($z = 0$)
- $A + \lambda u$ est un point ($z = 1$)

Soit $A = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ 1 \end{pmatrix}$, et $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ 0 \end{pmatrix}$

- $u + v$, $u - v$ et $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ sont des vecteurs ($z = 0$)
- $A + \lambda u$ est un point ($z = 1$)
- $B - A$ est un vecteur ($z = 1 - 1 = 0$)

Soit $A = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ 1 \end{pmatrix}$, et $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ 0 \end{pmatrix}$

- $u + v$, $u - v$ et $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ sont des vecteurs ($z = 0$)
- $A + \lambda u$ est un point ($z = 1$)
- $B - A$ est un vecteur ($z = 1 - 1 = 0$)
- $A + B$ est un point (milieu de A et B) : $\begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (x_a + x_b)/2 \\ (y_a + y_b)/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrices en coordonnées homogènes

Rotation : $R = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$,

$R(A) = \begin{pmatrix} a_x.\cos\alpha + a_y.\sin\alpha \\ -a_x.\sin\alpha + a_y.\cos\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ et $R(u) = \begin{pmatrix} u_x.\cos\alpha + u_y.\sin\alpha \\ -u_x.\sin\alpha + u_y.\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

Rotation : $R = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$,

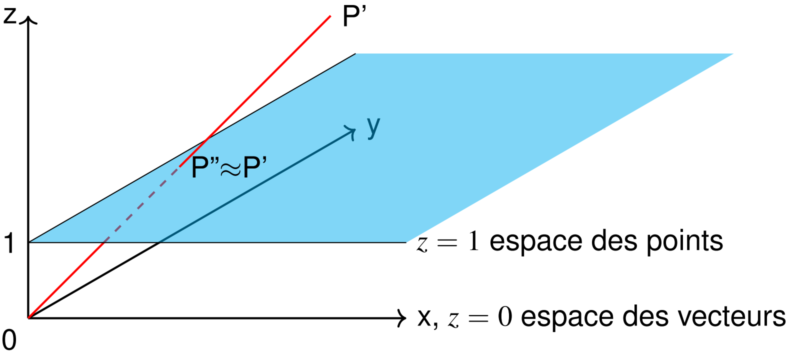
$R(A) = \begin{pmatrix} a_x.\cos\alpha + a_y.\sin\alpha \\ -a_x.\sin\alpha + a_y.\cos\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ et $R(u) = \begin{pmatrix} u_x.\cos\alpha + u_y.\sin\alpha \\ -u_x.\sin\alpha + u_y.\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

Homothétie : $S = \left(\begin{array}{cc|c} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$,

$S(A) = \begin{pmatrix} s_x.a_x \\ s_y.a_y \\ 1 \end{pmatrix}$ et $S(u) = \begin{pmatrix} s_x.u_x \\ s_y.u_y \\ 0 \end{pmatrix}$

Translation : $T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, $T(A) = \begin{pmatrix} a_x + t_x \\ a_y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$ et $T(u) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix}$

Translation : $T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, $T(A) = \begin{pmatrix} a_x + t_x \\ a_y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$ et $T(u) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix}$



GÉNÉRALISATION EN 3D

On a alors $A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$.

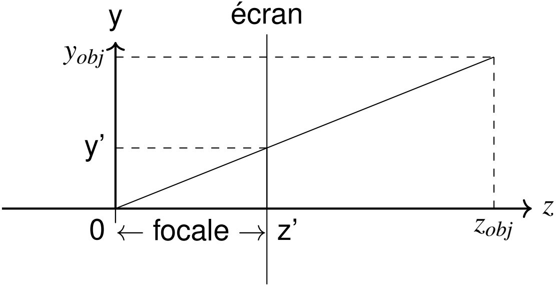
Et

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} m_{00} & m_{01} & m_{02} & t_x \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & t_y \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Note : La quatrième coordonnée est nommée w.

POSITION DU PROBLÈME

en 2D :



Théorême de Thalès :

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{Y'}{Y} \Rightarrow \frac{f}{Z} = \frac{Y'}{Y} \Rightarrow Y' = f \cdot \frac{Y}{Z}$$

Cette relation est malheureusement non linéraire

LINÉARISATION

On aimerait pouvoir exprimer cela sous la forme $M \cdot P = P'$

$$M \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}}^{P} = \overbrace{\begin{pmatrix} f \cdot Y/Z \\ f \\ 1 \end{pmatrix}}^{P'}$$

On aimerait pouvoir exprimer cela sous la forme $M \cdot P = P'$

$$M \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}}^{P} = \overbrace{\begin{pmatrix} f \cdot Y/Z \\ f \\ 1 \end{pmatrix}}^{P'}$$

Idée : tout multiplier par $Z \Rightarrow$ plus de dénominateur

$$P' = \begin{pmatrix} f \cdot Y \\ f \cdot Z \\ Z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f \cdot Y/Z \\ f \\ 1 \end{pmatrix}$$

Linéarisation : expression matricielle

$$M \cdot \begin{pmatrix} Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \cdot Y \\ f \cdot Z \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{M}}_{\text{matrice de projction}} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \cdot Y \\ f \cdot Z \\ Z \end{pmatrix}$$

ET EN 3D ?

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

et M est une matrice 4×4.

$$P' = M \cdot P = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x'/w' \\ y'/w' \\ z'/w' \\ 1 \end{pmatrix}$$

PROJECTION PERSPECTIVE – PLAN

1. TRANSFORMATIONS LINÉAIRES
2. PROJECTION
3. MATRICE DE PROJECTION EN OPENGL

SCHÉMA ET NOTATIONS

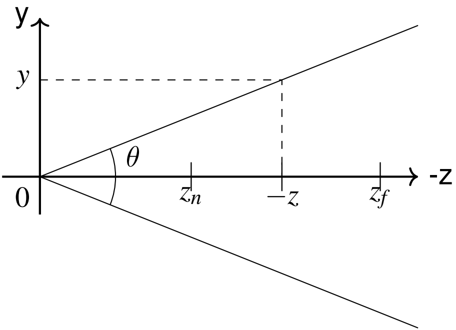
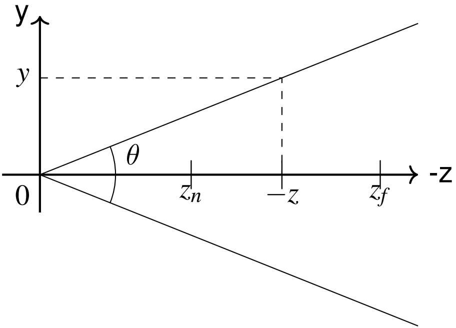
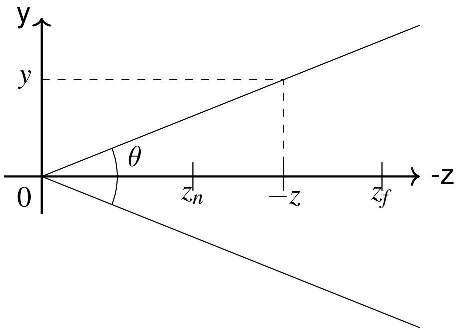


SCHÉMA ET NOTATIONS

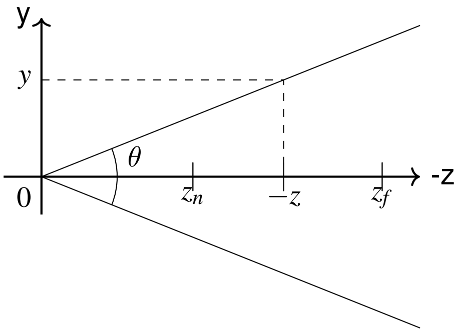


$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{-z}$$

SCHÉMA ET NOTATIONS



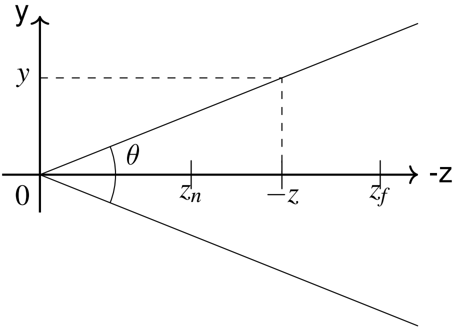
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{-z}$$
$$y = -z \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{-z}$

$y = -z \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

On pose $f = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{z}{y}$



$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{-z}$

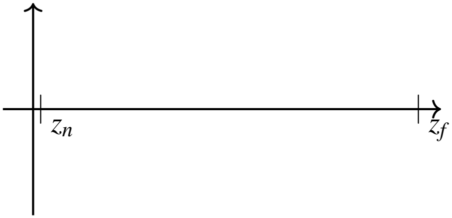
$y = -z \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

On pose $f = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{z}{y}$

matrice 3D :

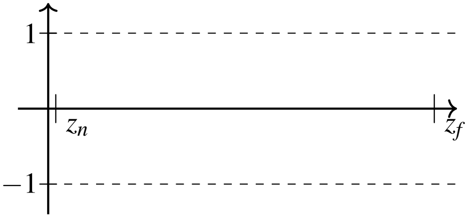
$$P = \begin{pmatrix} f \cdot aspect & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

RÉSOLUTION DES z



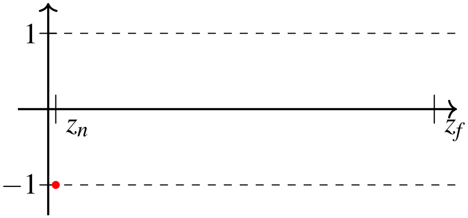
On veut :

Résolution des z



On veut :
$z_p \in [-1, 1]$

RÉSOLUTION DES z

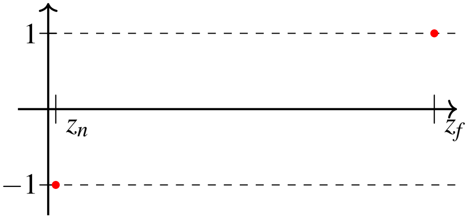


On veut :

$z_p \in [-1, 1]$

$z_p(z_n) = -1$

Résolution des z



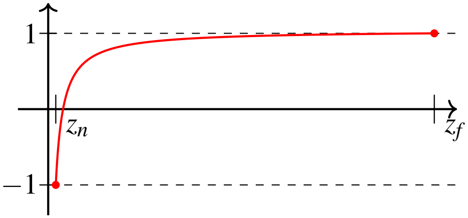
On veut :

$z_p \in [-1, 1]$

$z_p(z_n) = -1$

$z_p(z_f) = 1$

RÉSOLUTION DES z



On veut :

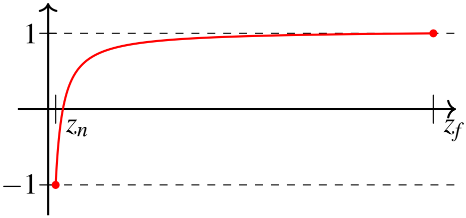
$z_p \in [-1, 1]$

$z_p(z_n) = -1$

$z_p(z_f) = 1$

On veut plus de précision vers z_n que vers z_f

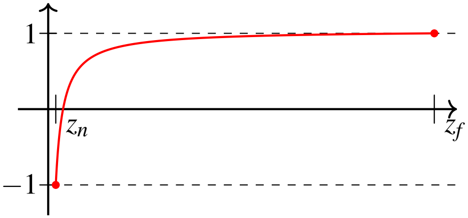
Résolution des z



On veut :
$z_p \in [-1, 1]$
$z_p(z_n) = -1$
$z_p(z_f) = 1$
On veut plus de précision vers z_n que vers z_f

- fonction affine $\Rightarrow$ ne correspond pas

RÉSOLUTION DES z



On veut :

$z_p \in [-1, 1]$

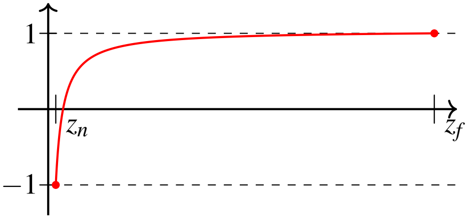
$z_p(z_n) = -1$

$z_p(z_f) = 1$

On veut plus de précision vers z_n que vers z_f

- fonction affine $\Rightarrow$ ne correspond pas
- fonction logarithmique $\Rightarrow$ impossible

RÉSOLUTION DES z



On veut :

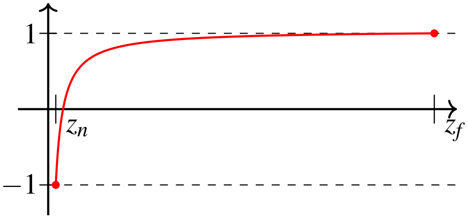
$z_p \in [-1, 1]$

$z_p(z_n) = -1$

$z_p(z_f) = 1$

On veut plus de précision vers z_n que vers z_f

- fonction affine $\Rightarrow$ ne correspond pas
- fonction logarithmique $\Rightarrow$ impossible
- fonction hyperbolique, de la forme $z_p = A + B \cdot \frac{1}{z}$



On veut :
$z_p \in [-1, 1]$
$z_p(z_n) = -1$
$z_p(z_f) = 1$
On veut plus de précision vers z_n que vers z_f

- fonction affine $\Rightarrow$ ne correspond pas
- fonction logarithmique $\Rightarrow$ impossible
- fonction hyperbolique, de la forme $z_p = A + B \cdot \frac{1}{z}$
- $z_p = -\frac{z_f + z_n}{z_n - z_f} + 2\frac{2 \cdot z_f \cdot z_n}{z_n - z_f} \cdot \frac{1}{z}$

DÉFINITION DE GLUPERSPECTIVE()

```c
void gluPerspective(double f, double aspect, double zn, double zf);
```

$$P = \begin{pmatrix} f \cdot aspect & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_f+z_n}{z_n-z_f} & 2 \cdot \frac{z_f z_n}{z_n-z_f} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$