

4ETI IMI, Examen [Géométrie]

Géométrie, modélisation graphique et programmation 3D

CPE Lyon

2014-2015 (2ème session)
durée 2h

Une feuille A4 manuscrite autorisée. Tout autre document interdit. Calculatrices interdites.

Répondez aux questions sur une copie et non sur le sujet.

Le sujet comporte 2 pages

Le barème approximatif est indiqué pour les grandes parties. Notez que le barème est donné à titre purement indicatif et pourra être adapté par la suite.

En cas de doute sur la compréhension de l'énoncé, explicitez ce que vous comprenez et poursuivez l'exercice dans cette logique.

Illustrez au maximum vos réponses de schémas.

1 Forme fondamentale

(9 points)

Soit un domaine $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$, et S une fonction de classe C^2 telle que

$$S : \begin{cases} \mathcal{D} & \mapsto \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \rightarrow S(u, v) \end{cases}$$

On désignera par Γ la surface correspondante à la trace de S .

Soit \mathbf{a} un vecteur quelconque du plan situé à la position $(u, v) \in \mathcal{D}$. On appelle \mathbf{a}' l'image de \mathbf{a} sur la surface Γ après application de la fonction S .

Question 1 *Donnez l'expression de \mathbf{a}' en fonction de \mathbf{a} , S , u et v .*

On considère désormais deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} du plan ayant la même origine au point (u, v) . On appelle θ l'angle entre ces deux vecteurs.

Question 2 *Rappelez l'expression de θ en fonction de \mathbf{a} et \mathbf{b} .*

On appelle θ' l'angle formée entre les vecteurs \mathbf{a}' et \mathbf{b}' , avec \mathbf{b}' l'image de \mathbf{b} sur Γ .

Question 3 *Donnez l'expression de θ' en fonction de \mathbf{a} et \mathbf{b} et la première forme fondamentale de S .*

On considère le cas particulier où $\mathbf{a}^T = (1, 0)$ et $\mathbf{b}^T = (0, 1)$.

Question 4 *Donnez l'expression de l'angle θ' dans ce cas particulier.*

On appelle surface *conforme*, une surface qui préserve les angles après application de S . En particulier, on notera qu'une surface conforme préserve les angles droits.

Question 5 *Déduisez une condition sur la première forme fondamentale de S pour qu'une surface soit conforme.*

2 Surfaces implicites

(6 points)

2.1 Question générales

Question 6 *Rappelez l'avantage des surfaces dites de convolution.*

Question 7 *Soit f une fonction définissant une surface S implicitement. Démontrez que ∇f est orthogonale à la surface S .*

2.2 Cas d'application

On souhaite définir une fonction $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ telle que ses isosurfaces soient des cubes dans l'espace. On souhaite également que $f(\mathbf{x}_0) = 1$ au point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, et que f tende rapidement vers 0 lorsque l'on s'éloigne de \mathbf{x}_0 .

Question 8 *Donnez l'expression d'une telle fonction.*

3 Modélisation paramétrique

(5 points)

Question 9 *Rappelez les grandes approches de modélisation paramétrique. Donnez pour chacune des approches leurs avantages et inconvénients.*