4ETI IMI, Examen
Géométrie, programmation 3D, modélisation graphique

CPE Lyon

2016–2017 (1ère session)

Durée : 1h30

Documents autorisés. Calculatrice interdite.

Répondez aux questions directement sur l'énoncé

Le sujet comporte 5 pages

En cas de doute sur la compréhension de l'énoncé, explicitez ce que vous comprenez et poursuivez l'exercice dans cette logique.

1 Rappels de Trigonométrie

$\cos 0 = 1$	$\cos \frac{\pi}{2} = 0$	$\cos \pi = -1$	$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$
$\sin 0 = 0$	$\sin \frac{\pi}{2} = 1$	$\sin \pi = 0$	$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$			
$\frac{d \sin(a \cdot x + b)}{dx} = a \cdot \cos(a \cdot x + b)$		$\frac{d \cos(a \cdot x + b)}{dx} = -a \cdot \sin(a \cdot x + b)$	

2 Géométrie projective

Question 1 *Soit la matrice suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que réalise cette matrice lorsqu'on l'applique à des points en coordonnées homogènes ? (avec une quatrième coordonnée à 1)
Décomposez cette matrice en deux opérations simples.

Question 2 *Soit la matrice suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Toujours en coordonnées homogènes, calculez les images par cette matrice des 8 *points du cube de centre* $(0, 0, 2, 1)$ *et de côté 2.*
Que se passe-t-il pour les coordonnées x *et* y *lorsque seul* z *varie ?*
Donnez l'expression générale de l'image de $(x, y, z, 1)$ *par cette matrice.*
Montrer que cette matrice est équivalente à une autre matrice plus "simple".

3 Courbes paramétriques B-Spline

On rappelle qu'une courbe B-spline cubique uniforme peut s'écrire sous la forme

$$S(t) = \sum_{k=0}^{k=3} b_k(t)\,\mathbf{P}_k \ ,$$

avec $t \in [0,1]$, et $b_k(t)$ étant les fonctions de bases B-Spline.

On rappelle également que cette relation s'exprime de manière matricielle

$$S(t) = P^T \,\mathrm{M}\, T(t) \ ,$$

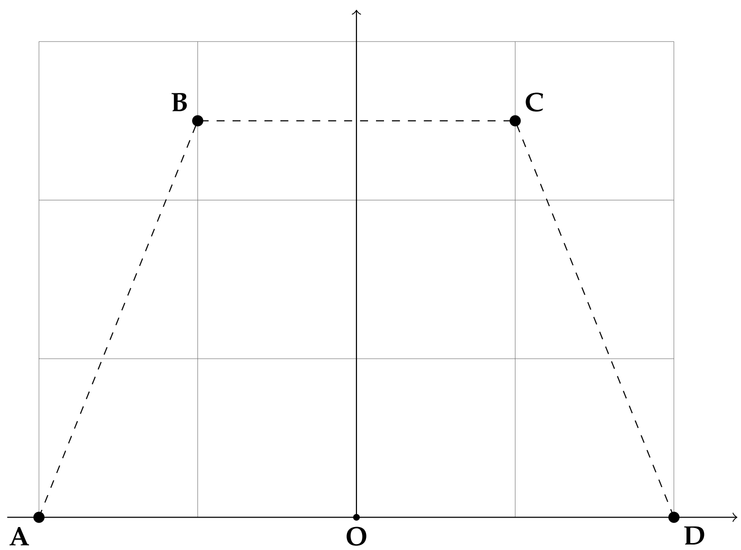
avec P le vecteur des points de contrôles,

$$T(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 3 *Dans le plan, on a les points de contrôle suivants (les trois premiers sont confondus) :*
$\boldsymbol{A} = (0,1)$ $\boldsymbol{B} = (0,1)$
$\boldsymbol{C} = (0,1)$ $\boldsymbol{D} = (3,2)$

Calculez la paramétrisation de la courbe B-spline associée (cela revient à exprimer x et y en fonction de t)
Essayez d'exprimer y en fonction de x.
Que peut-on dire de cette courbe ?
Cela était-il prévisible ?

Question 4 *Soit les points de contrôle **A**, **B**, **C** et **D** de la figure suivante.*
*Tracez (approximativement) les cinq B-splines associées respectivement aux points de contrôles **AAAB**, **AABC**, **ABCD**, **BCDD** et **CDDD**.*
Donnez le plus de détails de construction possible : position relative, tangentes, type de continuité, etc.



4 Géométrie différentielle

Question 5 *Que peut-on dire d'une surface qui aurait une courbure de Gausse nulle en tout point ?*
Donnez des exemples de telles surfaces.

Question 6 *Soit un cylindre de hauteur* 10*, d'axe* y *et de rayon* 4*, paramétré ainsi :*

$$C : [0,1] \times [0,1] \to I\!R^3$$

$$(u,v) \mapsto f(u,v) = \begin{cases} x = 4\cos(2\pi u) \\ y = 10v^2 \\ z = 4\sin(2\pi u) \end{cases}$$

Note : *la normale correspondant au point associé à* (u,v) *s'exprime ainsi :* $(\cos(2\pi u), 0, \sin(2\pi v))$

Calculez les dérivées premières et secondes de f *par rapport à* u *et à* v*.*
Calculez les matrices des deux formes fondamentales.
Calculez la matrice de Weingarten associée.
Donnez les expressions des quatre courbures (les deux principales, celle de Gauss et la moyenne) en fonction de u *et* v*.*
Quelles particularités présentent ces courbures ? Était-ce prévisible pour un cylindre ?

Question 7 *Comment une courbe peut-elle être C2 et pas G2 ?*
Donnez un exemple