Rappels de math

David Odin

Septembre 2007

1. GÉOMÉTRIE BARYCENTRIQUE ET PROJECTIVE
   - Notions de barycentre
   - Différents types de projections
2. RAPPELS SUR LES MATRICES CARRÉES (2D, 3D, 4D)
   - Matrices, opérations de base
   - Représentation des transformations
   - Coordonnées homogènes
3. QUATERNIONS
4. ÉQUATION DE LA LUMIÈRE

Barycentre et moyenne

- Barycentre = moyenne pondérée

- Barycentre = moyenne pondérée
- $a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0$

BARYCENTRE ET MOYENNE

- Barycentre = moyenne pondérée
- $a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0$
- $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$

BARYCENTRE ET MOYENNE

- Barycentre = moyenne pondérée
- $a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0$
- $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$
- La position de C sur la droite (AB) est donnée par ses deux coordonnées *barycentriques* α et β

- Barycentre = moyenne pondérée
- $a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0$
- $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$
- La position de C sur la droite (AB) est donnée par ses deux coordonnées *barycentriques* α et β
- $\alpha \cdot A + \beta \cdot B = 2 \cdot \alpha \cdot A + 2 \cdot \beta \cdot B = n \cdot \alpha \cdot A + n \cdot \beta \cdot B \ldots$

- Barycentre = moyenne pondérée
- $a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0$
- $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$
- La position de C sur la droite (AB) est donnée par ses deux coordonnées *barycentriques* α et β
- $\alpha \cdot A + \beta \cdot B = 2 \cdot \alpha \cdot A + 2 \cdot \beta \cdot B = n \cdot \alpha \cdot A + n \cdot \beta \cdot B \dots$
- On peut s'arranger pour que $\beta = 1 - \alpha$

Barycentre et moyenne

- Barycentre = moyenne pondérée
- $a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0$
- $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$
- La position de C sur la droite (AB) est donnée par ses deux coordonnées *barycentriques* α et β
- $\alpha \cdot A + \beta \cdot B = 2 \cdot \alpha \cdot A + 2 \cdot \beta \cdot B = n \cdot \alpha \cdot A + n \cdot \beta \cdot B \ldots$
- On peut s'arranger pour que $\beta = 1 - \alpha$
- $C = A$ pour $\alpha = 1$ et $C = B$ pour $\alpha = 0$

- Barycentre = moyenne pondérée
- $a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0$
- $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$
- La position de C sur la droite (AB) est donnée par ses deux coordonnées *barycentriques* α et β
- $\alpha \cdot A + \beta \cdot B = 2 \cdot \alpha \cdot A + 2 \cdot \beta \cdot B = n \cdot \alpha \cdot A + n \cdot \beta \cdot B \dots$
- On peut s'arranger pour que $\beta = 1 - \alpha$
- $C = A$ pour $\alpha = 1$ et $C = B$ pour $\alpha = 0$
- α ou β peuvent être négatifs

APPLICATIONS

- L'équation $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$ a des applications un peu partout.

- L'équation $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$ a des applications un peu partout.
- Interpolation entre deux valeurs

APPLICATIONS

- L'équation $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$ a des applications un peu partout.
- Interpolation entre deux valeurs
- entre deux états (slidebar)

- L'équation $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$ a des applications un peu partout.
- Interpolation entre deux valeurs
- entre deux états (slidebar)
- entre deux images,

- L'équation $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$ a des applications un peu partout.
- Interpolation entre deux valeurs
- entre deux états (slidebar)
- entre deux images,
- etc.

- Les équations sont les mêmes qu'en 1D, avec une coordonnée en plus

BARYCENTRE EN 2D

- Les équations sont les mêmes qu'en 1D, avec une coordonnée en plus
- On a donc une coordonnée de trop

- Les équations sont les mêmes qu'en 1D, avec une coordonnée en plus
- On a donc une coordonnée de trop
- Mais la redondance a du bon

Projection orthographique

- Permet de passer de 3D à 2D

- Permet de passer de 3D à 2D
- Revient à supprimer une coordonnée dans un repère particulier

- Permet de passer de 3D à 2D
- Revient à supprimer une coordonnée dans un repère particulier
- Ne rend pas compte des distances

- Permet de passer de 3D à 2D
- Revient à supprimer une coordonnée dans un repère particulier
- Ne rend pas compte des distances
- Purement linéaire (conserve les barycentres)

Projection perspective

- Permet de passer de 3D à 2D

PROJECTION PERSPECTIVE

- Permet de passer de 3D à 2D
- Rend compte des distances

Projection perspective

- Permet de passer de 3D à 2D
- Rend compte des distances
- Non linéaire (ne conserve pas les barycentres)

Projection perspective

- Permet de passer de 3D à 2D
- Rend compte des distances
- Non linéaire (ne conserve pas les barycentres)
- Conserve les bi-rapports

- Permet de passer de 3D à 2D
- Rend compte des distances
- Non linéaire (ne conserve pas les barycentres)
- Conserve les bi-rapports
- “Ressemble à une projection barycentrique”

Ce que l'on a appris

- Les barycentres sont liés aux interpolations linéaires
- $C = \alpha \cdot A + (1 - \alpha) \cdot B$
- Les projections orthographiques et perspectives permettent de passer de 3D à 2D

Rappels de math – Plan

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$A \cdot V = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

Multiplications de matrices, applications

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$A \cdot V = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{pmatrix}$$

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$A \cdot V = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{pmatrix}$$

Attention !

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$A \cdot V = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{pmatrix}$$

Attention !

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Mais

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

Représentation “classique” des rotations :

$$\begin{cases} x' & = & x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta \\ y' & = & x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Représentation des rotations

Représentation “classique” des rotations :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta \\ y' & = & x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \end{array} \right.$$

Avec des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$V' = A \cdot V$$

Représentation “classique” des affinités :

$$\begin{cases} x' & = & \alpha \cdot x \\ y' & = & \beta \cdot y \end{cases}$$

Représentation des affinités

Représentation “classique” des affinités :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \alpha \cdot x \\ y' & = & \beta \cdot y \end{array} \right.$$

Avec des matrices :

$$A = \left(\begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{array} \right)$$

$$V' = A \cdot V$$

Représentation des affinités

Représentation “classique” des affinités :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \alpha \cdot x \\ y' & = & \beta \cdot y \end{array} \right.$$

Avec des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$V' = A \cdot V$$

Note : les translations ne peuvent pas être représentées directement par des matrices.

On peut composer les opérations : si A est une matrice de rotation et B est une matrice d'affinité :

- $V' = A \cdot V$ est le "rotaté" de V

On peut composer les opérations : si A est une matrice de rotation et B est une matrice d'affinité :

- $V' = A \cdot V$ est le “rotaté” de V
- $V'' = B \cdot V'$ est le “dilaté” de V'

Compositions des opérations

On peut composer les opérations : si A est une matrice de rotation et B est une matrice d'affinité :

- $V' = A \cdot V$ est le “rotaté” de V
- $V'' = B \cdot V'$ est le “dilaté” de V'
- $V'' = B \cdot A \cdot V$ est le “transformé” de V

On peut composer les opérations : si A est une matrice de rotation et B est une matrice d'affinité :

- $V' = A \cdot V$ est le “rotaté” de V
- $V'' = B \cdot V'$ est le “dilaté” de V'
- $V'' = B \cdot A \cdot V$ est le “transformé” de V
- $V'' = (B \cdot A) \cdot V$ (notons que $A \cdot B$ peut être précalculé)

On peut composer les opérations : si A est une matrice de rotation et B est une matrice d'affinité :

- $V' = A \cdot V$ est le "rotaté" de V
- $V'' = B \cdot V'$ est le "dilaté" de V'
- $V'' = B \cdot A \cdot V$ est le "transformé" de V
- $V'' = (B \cdot A) \cdot V$ (notons que $A \cdot B$ peut être précalculé)

On peut composer les opérations : si A est une matrice de rotation et B est une matrice d'affinité :

- $V' = A \cdot V$ est le “rotaté” de V
- $V'' = B \cdot V'$ est le “dilaté” de V'
- $V'' = B \cdot A \cdot V$ est le “transformé” de V
- $V'' = (B \cdot A) \cdot V$ (notons que $A \cdot B$ peut être précalculé)

Chaque multiplication de matrice permet de changer de repère.

ET EN 3D ?

C'est à peu près la même chose mais on a :

- 3 rotations (suivant les trois axes)

ET EN 3D ?

C'est à peu près la même chose mais on a :

- 3 rotations (suivant les trois axes)
- 3 affinités (suivant les trois plans)

1. Géométrie barycentrique et projective
   - Notions de barycentre
   - Différents types de projections
2. Rappels sur les matrices carrées (2D, 3D, 4D)
   - Matrices, opérations de base
   - Représentation des transformations
   - Coordonnées homogènes
3. Quaternions
4. Équation de la lumière

Problème de la translation :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \\ y' & = & \delta \cdot x + \epsilon \cdot y + \zeta \end{array} \right.$$

Ne peut pas être représenté sous la forme matricielle normale : $V' = A \cdot V$

Problème de la translation :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \\ y' & = & \delta \cdot x + \epsilon \cdot y + \zeta \end{array}\right.$$

Ne peut pas être représenté sous la forme matricielle normale : $V' = A \cdot V$

“Truc” : rajouter une coordonnée :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon & \zeta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

correspond à

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \\ y' & = & \delta \cdot x + \epsilon \cdot y + \zeta \\ 1 & = & 1 \end{array}\right.$$

Remarques importantes :

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ 2 \cdot y \\ 2 \end{pmatrix}$ représentent le même point.

Remarques importantes :

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ 2 \cdot y \\ 2 \end{pmatrix}$ représentent le même point.
- À l'aide des coordonnées homogènes, toutes les transformations peuvent être représentées de la même façon

Remarques importantes :

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ 2 \cdot y \\ 2 \end{pmatrix}$ représentent le même point.
- À l'aide des coordonnées homogènes, toutes les transformations peuvent être représentées de la même façon
- Les projections perspectives peuvent également être représentées à l'aide des matrices 4x4.

Ce que l'on a appris

- les matrices permettent de représenter les transformations affines (Translate, Rotate, Scale)
- l'ordre des transformations est important
- l'utilisation des coordonnées homogènes permet d'utiliser des matrices pour les translations également.

Rappels de math – Plan

Quaternions : Présentation

- Extension des nombres complexes ($z = a + i \cdot b$)

- Extension des nombres complexes ($z = a + i \cdot b$)
- Forme générale : $q = a + i \cdot b + j \cdot c + k \cdot d$

Quaternions : Présentation

- Extension des nombres complexes ($z = a + i \cdot b$)
- Forme générale : $q = a + i \cdot b + j \cdot c + k \cdot d$
- Avec : $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

- Extension des nombres complexes ($z = a + i \cdot b$)
- Forme générale : $q = a + i \cdot b + j \cdot c + k \cdot d$
- Avec : $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- Et : $i \cdot j = -j \cdot i = k, \quad j \cdot k = -k \cdot j = i, \quad k \cdot i = -i \cdot k = j$

Quaternions : Opérations de base

$q_1 = a_1 + i \cdot b_1 + j \cdot c_1 + k \cdot d_1$
$q_2 = a_2 + i \cdot b_2 + j \cdot c_2 + k \cdot d_2$

- Conjugué : $\overline{q_1} = a_1 + i \cdot b_1 + j \cdot c_1 + k \cdot d_1$

$q_1 = a_1 + i \cdot b_1 + j \cdot c_1 + k \cdot d_1$
$q_2 = a_2 + i \cdot b_2 + j \cdot c_2 + k \cdot d_2$

- Conjugué : $\overline{q_1} = a_1 + i \cdot b_1 + j \cdot c_1 + k \cdot d_1$
- Addition :
  $q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2) + j \cdot (c_1 + c_2) + k \cdot (d_1 + d_2)$

$q_1 = a_1 + i \cdot b_1 + j \cdot c_1 + k \cdot d_1$
$q_2 = a_2 + i \cdot b_2 + j \cdot c_2 + k \cdot d_2$

- Conjugué : $\overline{q_1} = a_1 + i \cdot b_1 + j \cdot c_1 + k \cdot d_1$
- Addition :
  $q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2) + j \cdot (c_1 + c_2) + k \cdot (d_1 + d_2)$
- Multiplication : (un peu long !)

- Les quaternions de norme 1 permettent de représenter une rotation (sur les 3 axes)

- Les quaternions de norme 1 permettent de représenter une rotation (sur les 3 axes)
- Interpoler entre deux quaternions permet d'interpoler régulièrement entre deux positions de rotations

QUATERNIONS : SLERP

- Les quaternions de norme 1 permettent de représenter une rotation (sur les 3 axes)
- Interpoler entre deux quaternions permet d'interpoler régulièrement entre deux positions de rotations
- Il "suffit" ensuite de passer de quaternion à matrice et vice-versa

La lumière renvoyée par un objet peut être modélisée en trois composantes principales

- La lumière ambiante, qui donne sa couleur à un objet

Les différentes composantes de la lumière

La lumière renvoyée par un objet peut être modélisée en trois composantes principales

- La lumière ambiante, qui donne sa couleur à un objet
- La lumière diffuse, qui donne le relief

La lumière renvoyée par un objet peut être modélisée en trois composantes principales

- La lumière ambiante, qui donne sa couleur à un objet
- La lumière diffuse, qui donne le relief
- La lumière spéculaire, qui rend l'objet brillant et vivant

- Ne dépend que de la lumière et de l'objet

- Ne dépend que de la lumière et de l'objet
- Indépendant de la position de l'observateur

- Ne dépend que de la lumière et de l'objet
- Indépendant de la position de l'observateur
- $C_d = C_O \cdot C_L \cdot \vec{N}.\vec{L}$

Modélisation de la lumière spéculaire

- Dépend de la position de l'observateur par rapport à la lumière

Modélisation de la lumière spéculaire

- Dépend de la position de l'observateur par rapport à la lumière
- Possède un paramètre en exposant, permettant de choisir la taille des taches spéculaires

- Dépend de la position de l'observateur par rapport à la lumière
- Possède un paramètre en exposant, permettant de choisir la taille des taches spéculaires
- $C_S = C_L \cdot (\vec{N}.\vec{R})^\alpha$